Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Tobias Schröder
Heidelberg, 21.1.19
tobias.schroeder@stud.uni-heidelberg.de

0.1 Motivation

Wir erinnern uns an die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{0.1}$$

Mit der Notation $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ und der symplektischen $2l \times 2l$ Matrix

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{l\times l} & \mathbb{1}_{l\times l} \\ \mathbb{1}_{l\times l} & \mathbf{0}_{l\times l} \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

können wir dies schreiben als

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{J} \nabla_{\boldsymbol{x}} H\,. \tag{0.3}$$

Wir beobachten nun, dass die Änderungsrate einer zeitunabhängigen glatten Funktion

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \tag{0.4}$$

entlang der Flusslinien einer Hamiltonfunktion H gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Df\dot{\boldsymbol{x}} = (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)^T \mathcal{J} \nabla_{\boldsymbol{x}} H \tag{0.5}$$

Dies motiviert folgende Notation

$$\{f, H\} := (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)^T \mathcal{J}\, \nabla_{\boldsymbol{x}} H \tag{0.6}$$

und $f(\boldsymbol{x}_t) = \mathrm{const} \Leftrightarrow \{f, H\} = 0$. Die so definierte Funktion heißt Poissonklammer und soll im Folgenden systematisch untersucht werden.

0.2 Poissonmannigfaltigkeiten

Definition 1 (Poissonmannigfaltigkeit)**.** *Ein Tupel $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ mit einer Funktion $\{\cdot\,,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ und einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heißt Poissonmannigfaltigkeit, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. *Bilinearität:* $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. *Jakobiidentität:* $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
3. *Leibnizregel:* $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$

Dies sind genau die Eigenschaften, die man im euklidischen Fall erwartet, denn es gilt:

Theorem 1. *$(\mathbb{R}^{2n}, \{\cdot\,,\cdot\})$ mit $\{f, g\} := (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)^T \mathcal{J}\, \nabla_{\boldsymbol{x}} g$ für ausreichend reguläre Funktionen f, g ist eine Poissonmannigfaltigkeit. Zusätzlich erfüllt diese Poissonklammer:*
Die Poissonklammer ist nicht entartet: Seien $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ und $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ gegeben, so existiert eine Funktion $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ mit $\{f, g\}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$.

Um die Jakobiidentität zu verifizieren benötigen wir folgenden Bezug zur Lieklammer

Lemma 1. *Wir definieren für f ausreichend regulär $D_f := \{f, \cdot\}$ und bezeichnen das von f erzeugte hamiltonsche Vektorfeld als $\boldsymbol{v}_f = \mathcal{J}\nabla_{\boldsymbol{x}} f$. Die Lieableitung bezüglich $\boldsymbol{v}_f$ wird mit $L_{\boldsymbol{v}_f}$ bezeichnet. Es gilt dann:*

$$L_{\boldsymbol{v}_f}(g) = (\mathcal{J}\nabla_{\boldsymbol{x}} f)_i \frac{\partial}{\partial x_i} g = (\nabla_{\boldsymbol{x}} g)^T \mathcal{J}\, \nabla_x f = -\{f, g\} = -D_f(g) \tag{0.7}$$

Insbesondere ist D_f eine Derivation und es gilt:

$$[D_f, D_g] = [L_{\boldsymbol{v}_f}, L_{\boldsymbol{v}_g}] = L_{[\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{v}_g]} \tag{0.8}$$

sodass der Kommutator ein Differentialoperator erster Ordnung ist.

Damit kann die Jacobiidentität gezeigt werden. Betrachten wir einer der Terme:

$$\{f, \{g, h\}\} = (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)^T \mathcal{J}\nabla_{\boldsymbol{x}}((\nabla_{\boldsymbol{x}} g)^T \mathcal{J}\nabla_{\boldsymbol{x}} h) \tag{0.9}$$

Jeder Term enthält entweder eine zweite Ableitung von h oder eine zweite Ableitung von g. Können wir also zeigen, dass die zweiten Ableitungen von h, g etc. verschwinden, so muss die Jacobiidentität erfüllt sein. Die zweiten Ableitungen verschwinden aber, betrachten wir beispielsweise alle Terme, die zweite Ableitungen von h enthalten können:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = [D_f, D_g]h = [X_f, X_g]_i \partial_i h \tag{0.10}$$

Wegen zuvor gezeigtem Lemma kann diese Summe nur erste Ableitungen von h enthalten. Analoges folgt für g und h, indem wir die entsprechenden Summanden betrachten. Damit darf keiner der Terme zweite Ableitungen von f, g oder h enthalten. Da aber jeder der Terme eine zweite Ableitung von f, g oder h enthält, müssen alle Terme verschwinden und die Jacobiidentität ist erfüllt. Die Poissonklammer lässt sich jedoch auch in einem allgemeineren Setting einer symplektischen Mannigfaltigkeit einsetzen.

Theorem 2. *Jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) ist eine Poissonmannigfaltigkeit, wobei die Poissonklammer definiert ist durch*

$$\{f, g\} = \omega(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g) = df(\boldsymbol{X}_g)\,. \tag{0.11}$$

wobei die Vektorfelder eindeutig festgelegt sind durch das Differential von f:

$$\omega(\boldsymbol{X}_f, \cdot) = \mathrm{d}f\,. \tag{0.12}$$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch in dieser Allgemeinheit nicht, da die Poissonklammer einer Poissonmannigfaltigkeit im Allgemeinen ausgeartet sein kann. Ist die Poissonklammer jedoch nicht ausgeartet, so lässt sich eine symplektische Form definieren. Wegen des Bezugs der Poissonklammer zur symplektischen Form können wir die Poissonklammer auch in lokalen Koordinaten betrachten. Wegen des Darboux Theorem existieren Koordinaten $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ in denen ω die Form

$$\omega = \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i \tag{0.13}$$

hat. Dabei verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention. Wir erhalten nun zunächst die Koordinaten von $\boldsymbol{X}_f$ in der Basis $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}$ via

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{X}_f, \cdot) &= \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}_{q_i}} \mathrm{d}p_i - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}_{p_i}} \mathrm{d}q_i \\ &= \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \end{aligned} \tag{0.14}$$

und erhalten damit den expliziten Ausdruck

$$\{f, g\} = \omega(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g) = df(\boldsymbol{X}_g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)^T \mathcal{J}\, \nabla_{\boldsymbol{x}} g \tag{0.15}$$

Mit dieser Darstellung in lokalen Koordinaten lassen sich die Poissonklammern einfacher Beispiele nachrechnen. Zunächst haben wir ja bereits gesehen, dass die Zeitableitung einer Funktion entlang des hamiltonschen Flusses durch die Poissonklammer gegeben ist. Insbesondere folgt:

$$\begin{aligned}\{q_j, H\} &= \sum_{i=1}^{l} \left(\delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i} - 0\right) = \dot{q}_j \\ \{p_j, H\} &= \sum_{i=1}^{l} \left(0 - \delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \dot{p}_j\end{aligned} \tag{0.16}$$

Außerdem gibt es die sogenannten fundamentalen Poissonklammern, die gegeben sind durch

$$\{q_j, q_i\} = 0\,, \qquad \{p_j, p_i\} = 0\,, \qquad \{q_j, p_i\} = \delta_{ij}\,. \tag{0.17}$$

Tatsächlich ist dies sogar eine Definition für kanonische Koordinaten, und eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn unter der Transformation die fundamentalen Poissonklammern kovariant transformieren. Ein weiteres Beispiel ist der Drehimpuls $L_k \varepsilon_{ijk} q_i p_j$.

Example 1. *Im Fall des Drehimpulses können wir schnell berechnen:*

$$\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{jkm}(\{p_i, q_k\}p_m + q_k\{p_i, p_m\}) = -\varepsilon_{jim}p_m = \varepsilon_{ijm}p_m\,. \tag{0.18}$$

Analog folgt $\{q_i, L_j\} = \varepsilon_{ijm}q_m$. *Außerdem können wir mit der Produktregel die Poissonklammer zweier beliebiger Drehimpulskomponenten berechnen.*

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ilm}(q_l\{p_m, L_j\} + \{q_l, L_j\}p_m) \\ &= \varepsilon_{ilm}(\varepsilon_{mjk}q_l p_k + \varepsilon_{ljk}q_k p_m) \\ &= \delta_{ij}q_k p_k - q_j p_i + p_j q_i - \delta_{ij}q_m p_m = q_i p_j - q_j p_i \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}q_l p_m = \varepsilon_{ijk}L_k\end{aligned} \tag{0.19}$$

Da wir über Levi Civita Symbole summieren können wir außerdem leicht folgende Identität verifizieren.

$$\{L_i, |L|^2\} = 0 \tag{0.20}$$

Außerdem gibt es eine auffällige Parallele zur Quantenmechanik, in der die Poissonklammern zu Kommutatoren werden.

Für Beweise, die später in diesem Seminar noch folgen sollen, beweisen wir zusätzlich:

Theorem 3. *Sei* (M, ω) *eine symplektische Mannigfaltigkeit,* f, g *glatte reellwertige (Hamilton)-Funktionen auf* M *und* S_f, S_g *die von den hamiltonschen Vektorfeldern* $\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g$ *erzeugten Flüsse auf* M. *Dann kommutieren die Flüsse genau dann, wenn* $\{f, g\} = \text{const}$.

Proof. Zunächst benötigen wir folgenden Satz aus der Literatur:

Theorem 4. *Sei* M *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ *Vektorfelder auf* M *und* $S^t_{\boldsymbol{X}}, S^t_{\boldsymbol{Y}}$ *die von den Vektorfeldern erzeugten Flüsse, d.h.*

$$\dot{S}^t_{\boldsymbol{X}}(x_0) = \boldsymbol{X}(S^t_{\boldsymbol{X}}(x_0)) \tag{0.21}$$

Dann gilt $S^t_{\boldsymbol{X}}(x_0)S^s_{\boldsymbol{Y}}(x_0) = S^s_{\boldsymbol{Y}}(x_0)S^t_{\boldsymbol{X}}(x_0)$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in M$ *genau dann, wenn* $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = 0$.

Es lässt sich zunächst zeigen, dass der Kommutator in zweiter Ordnung einer Taylorreihe misst, wie stark die Flüsse nicht kommutieren. Über Zerlegung der Zeiten t, s in kleine Teilstücke kann dann der obige Satz bewiesen werden. Siehe z.B. Arnol'd. In unserem Kontext hat dies folgende wichtige Konsequenz: Es gilt zunächst wegen der Jacobiidentität für beliebige glatte reelwertige Funktionen h

$$D_{\{f,g\}}h = \{\{f, g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = [D_f, D_g]h \tag{0.22}$$

und andererseits für alle h

$$[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]h = [D_f, D_g]h = \{\{f, g\}, h\} = d(\{f, g\})(\boldsymbol{X}_h) = 0\,. \tag{0.23}$$

Dies gilt insbesondere für die Koordinatenfunktionen $h = x_i$, gegebenenfalls durch null fortgesetzt, und somit folgt die Behauptung. □

Im Folgenden betrachten wir weiter symplektische Mannigfaltigkeiten, deren Poissonklammer über die symplektische Form wie oben definiert ist.

0.3 Erhaltungsgrößen

Wir kommen nun zu der Analyse von Erhaltungsgrößen.

Definition 2 (Erhaltungsgröße). *Eine Funktion f heißt Erhaltungsgröße, falls f konstant entlang des hamiltonschen Flusses S_H^t ist, d.h.*

$$f(S_H^t(x_0), t) = f(x_0, 0) \tag{0.24}$$

Eine Erhaltungsgröße heißt erstes Integral (first integral of motion), wenn f nicht explizit von der Zeit abhängt.

Definition 3 (Einparametergruppenwirkung). *Eine Familie von Diffeomorphismen auf M $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{R}}$, $\varphi_s : M \to M$ heißt Einparametergruppenwirkung, falls für alle $x_0 \in M$ gilt:*

1. $\varphi_0(x_0) = x_0$
2. $\varphi_{s_1+s_2}(x_0) = \varphi_{s_1}(\varphi_{s_2}((x_0))$

(Eigentlich eine Einparameter-Untergruppe der Diffeomorphismen auf M). Eine Einparametergruppe von Symmetrien einer Hamiltonfunktion H ist eine Einparametergruppe komplett kanonischer Transformationen mit

$$H(\varphi_s(x_0)) = H(x_0) \tag{0.25}$$

für alle $x_0 \in M$.

Definition 4 (Generator). *Der infinitesimale Generator, ist das von der Einparametergruppe erzeugte Vektorfeld:*

$$\boldsymbol{X}_\varphi(x_0) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_s(x_0)\Big|_{s=0} \tag{0.26}$$

Wir kommen nun zum entscheidenden Satz, der die Gültigkeit des Noether Theorems ermöglicht. Dieser funktioniert allerdings in dieser Form nur lokal bzw. im euklidischen Fall.

Theorem 5. *Der infinitesimale Generator einer Einparametergruppe komplett kanonischer Transformationen ist ein hamiltonsches Vektorfeld zu einer Hamiltonfunktion K, und die Gruppe der Transformationen stimmt mit dem hamiltonschen Fluss von K überein.*

Proof. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}_s(x_0) = \boldsymbol{X}_\varphi(\varphi_s(x_0)), \qquad \varphi_0(x_0) = x_0 \tag{0.27}$$

Der infinitesimale Generator löst diese Differentialgleichung. Wir benötigen als nächstes ein Lemma, und dafür zunächst folgenden Begriff:

Definition 5 (Hamiltonsche Matrix). *Der Raum der Hamiltonschen Matrizen ist der Tangentialraum $\mathfrak{sp}(n)$ der symplektischen Matrizen $Sp(n)$ an der Identität. Dies entspricht genau den Matrizen B, die*

$$B^T J + JB = 0 \tag{0.28}$$

erfüllen.

Proof. Die symplektischen Matrizen sind definiert durch die Gleichung

$$A^T JA - J = 0 \tag{0.29}$$

definiert. Definiere $f(A) = A^T JA - J$. Dann ist 0 ein regulärer Wert von f. Wir bestimmen das Differential von f. Es ist zunächst:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + tB) - f(A) - Df_A(tB)}{t} = B^T \mathcal{J} A - A^T \mathcal{J} B - Df_A(B) \tag{0.30}$$

Das Differential von f an der Stelle B ist also eine lineare Abbildung

$$Df_A : \mathrm{Mat}(2n \times 2n) \to \mathrm{Mat}(2n \times 2n)\,, \quad B \mapsto B^T \mathcal{J} A - A^T \mathcal{J} B \tag{0.31}$$

Der Tangentialraum ist nun der Kern dieses Differentials an der Identität, und somit

$$\mathfrak{sp}(n) = \ker Df_{\mathbb{1}} = \{B \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n) \,|\, B^T \mathcal{J} + \mathcal{J} B = 0\} \tag{0.32}$$

□

Um die Diskussion fortzusetzen gehen wir in lokale Koordinaten und betrachten nur noch den Fall $\mathbb{R}^{2n}$.

Lemma 2. *Ein Vektorfeld $\boldsymbol{X} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ist genau dann ein hamiltonsches Vektorfeld, wenn die Jacobimatrix $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ eine hamiltonsche Matrix für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ist.*

Proof. Die Beweisidee besteht darin, dass die Jacobimatrix von $\mathcal{J}\boldsymbol{X}$ symmetrisch ist, und daher das Vektorfeld $\mathcal{J}\boldsymbol{X}$ konservativ ist. □

Im Allgemeinen Fall differenzierbarer Mannigfaltigkeiten ist eine solche Aussage nicht möglich, insbesondere da eine Definition der Jacobimatrix eines Vektorfelds nicht sinnvoll definiert werden kann. Stattdessen benötigt man eine zusätzliche Vorraussetzung um das Noethertheorem zu beweisen, nämlich dass die Form $\omega(\boldsymbol{X}_\varphi, \cdot)$ exakt ist und damit die Cartan Ableitung einer Hamiltonfunktion K ist. Um das Noethertheorem im euklidischen Fall zu beweisen benötigen wir ein weiteres Lemma, und zwar:

Lemma 3. *Ist die Matrix $J(\boldsymbol{x}, t)$ symplektisch, dann ist $B = \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1}$ hamiltonsch.*

Proof. Durch Ableiten von $J^T \mathcal{J} J = \mathcal{J}$ nach der Zeit erhält man:

$$\frac{\partial J^T}{\partial t} \mathcal{J} J + J^T \mathcal{J} \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{0.33}$$

Daher ist

$$A = \mathcal{J} \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} = J^{-T} \frac{\partial J^T}{\partial t} \mathcal{J}^T = A^T \tag{0.34}$$

symmetrisch, was impliziert dass $B = \mathcal{J}^T A$ hamiltonsch ist. □

Mit dieser Vorarbeit kann nun das ursprüngliche Resultat bewiesen werden, nämlich dass der infinitesimale Generator ein hamiltonsches Vektorfeld ist.
Gemäß unserer Vorraussetzung betrachten wir eine Einparametergruppe komplett kanonischer Transformationen. Damit ist die Matrix $J = \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_s(\boldsymbol{x})$ gemäß der Definition symplektisch für beliebige s. Es ist weiterhin

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_s(\boldsymbol{x}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} X_\varphi(\varphi_s(\boldsymbol{x})) = \nabla_{\varphi_s(\boldsymbol{x})} X_\varphi(\varphi_s(\boldsymbol{x})) J \tag{0.35}$$

Somit ist

$$\nabla_{\varphi_s(\boldsymbol{x})} X_\varphi(\varphi_s(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} \tag{0.36}$$

eine hamiltonsche Matrix. Somit ist auch das Vektorfeld X_φ hamiltonsch und damit existiert eine Hamiltonfunktion □

Theorem 6 (Noether, hamiltonsche Formulierung im euklidischen Fall)**.** *Sei φ_s eine Einparametergruppenwirkung komplett kanonischer Symmetrien von H. Dann ist die Hamiltonfunktion K, die den hamiltonschen Fluss φ_s erzeugt, eine Erhaltungsgröße von H.*

Proof. Da φ_s eine Einparametergruppe von Symmetrien ist, ist H entlang des Flusses von φ_s konstant. Da φ_s eine Familie komplett kanonischer Transformationen ist, existiert nach Theorem 5 eine Hamiltonfunktion K, deren hamiltonscher Fluss gegeben ist durch φ_s. Da H konstant entlang der Flusslinien ist, gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\varphi_t(x)) = \{H, K\} = 0 \tag{0.37}$$

Damit ist aber insbesondere K konstant entlang des Hamiltonschen Flusses σ_t, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(\sigma_t(x)) = \{K, H\} = 0 \tag{0.38}$$

□

Der Beweis kann nicht einfach global auf symplektische Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Angenommen aber, $\omega(\boldsymbol{X}_\varphi, \cdot)$ ist exakt, dann existiert ein K, sodass $\omega(\boldsymbol{X}_\varphi, \cdot) = -dK$. Nun ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(\sigma_t(x))\Big|_{t=0} = X_H(x)K(x) = \{K, H\}(x) = 0 \tag{0.39}$$

da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\varphi_t(x))|_{t=0} = X_\varphi(x)H(x) = \{H, K\}(x) = 0 \tag{0.40}$$

Da die Form ω bereits geschlossen ist, folgt die Exaktheit zum Beispiel für Mannigfaltigkeiten, die homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Unterraum sind.

0.4 Geodäten auf Revolutionsflächen

Wir wenden uns nun der Anwendung des Noethertheorems zu. Eine allgemeine zweidimensionale Revolutionsfläche eingebettet im $\mathbb{R}^3$ parametrisieren wir mittels Funktionen r, z und Koordinaten u, v als

$$\phi : (u, v) \mapsto (r(u)\cos(v), r(u)\sin(v), z(u)) \tag{0.41}$$

Wir sehen direkt, dass eine solche Fläche invariant ist unter Translationen von v, die Fläche hat also eine S^1 Symmetrie. Wir können die Geometrie gut über eine Metrik charakterisieren. Diese erhalten wir über Rückzug der euklidischen Metrik, d.h.

$$g'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \phi^*(g)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = g(D\phi\boldsymbol{X}, D\phi\boldsymbol{Y}) \tag{0.42}$$

Die Komponenten von g' sind dann gegeben durch die Wirkung des Differentials von ϕ auf $X, Y = \partial_v, \partial_u$

$$\begin{aligned} G &:= g'_{11} = g\left(D\phi\frac{\partial}{\partial u}, D\phi\frac{\partial}{\partial u}\right) = r'(u)^2 + z'(u)^2 \\ F &:= g'_{12} = g\left(D\phi\frac{\partial}{\partial u}, D\phi\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0 \\ E &:= g'_{22} = g\left(D\phi\frac{\partial}{\partial v}, D\phi\frac{\partial}{\partial v}\right) = r(u)^2 \end{aligned} \tag{0.43}$$

Die quadratische Matrix g' heißt auch erste Fundamentalform. Man kann sie alternativ erhalten durch Entwicklung von $\mathrm{d}x_i$ nach u und v. Über die erste Fundamentalform ist auch das Transformationsverhalten der konjugierten Impulse geklärt. Das Differential $D\phi$ ist eine Abbildung:

$$D_{(u,v)}\phi : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \to T_{\phi(u,v)}M \xrightarrow{P_i} \mathbb{R} \tag{0.44}$$

und wir erhalten somit für die konjugierten Impulse der Koordinaten u, v:

$$p_u = P_i D\phi_{i1}\,, \qquad p_v = P_i D\phi_{iv} \tag{0.45}$$

Somit lautet unsere Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten in unserem Fall:

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}D\phi^{-1})^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p_u^2}{G} + \frac{p_v^2}{E}\right) \tag{0.46}$$

wobei wir genutzt haben, dass $F = 0$. Wie bereits im Vortrag über grundlegende Begriffe und Zusammenhänge in der Lagrange und Hamilton Theorie erläutert wurde sind die Bewegungsgleichungen dieser Hamiltonfunktion äquivalent zu der Geodätengleichung.

0.4.1 Erhaltungsgrößen auf einer Revolutionsfläche

Wir betrachten eine Symmetrie von H auf M, deren Einfluss auf T^*M und die daraus resultierende Erhaltungsgröße. Sei also eine Koordinatentransformation

$$u_t : M \to M, q \to Q(q,t) \tag{0.47}$$

gegeben. Wie bereits im Fall zuvor können wir mittels des Differentials das Transformationsverhalten des konjugierten Impulses ermitteln. Zusammen erhält man auf dem Tangentialbündel die Transformation

$$(q,p) \to (Q(q) = u_t(q), P(q,p) = p\, D_q u^{-1}) \tag{0.48}$$

Das von der Transformation erzeugte Vektorfeld dann gegeben durch

$$\boldsymbol{X}_q(q,p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t(q)\Big|_{t=0} \tag{0.49}$$

und

$$\boldsymbol{X}_p(q,p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p D_q u_t(q)^{-1}\Big|_{t=0} = -p D_q u_t^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_q u_t\right) D_q u_t^{-1}\Big|_{t=0} = -p D_q \boldsymbol{X}_q(q,p)\,. \tag{0.50}$$

Wie man schnell einsieht lässt sich dieses Vektorfeld zu einer Hamiltonfunktion integrieren. Setzen wir $K = p\boldsymbol{X}_q$ so gilt in lokalen Koordinaten für das totale Differential von K:

$$\mathrm{d}K = X_{q_j}\mathrm{d}p_j + p_j \frac{\partial \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{q}_j}}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i(\boldsymbol{X}, \cdot) = \omega(\boldsymbol{X}, \cdot) \tag{0.51}$$

mit $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_q, \boldsymbol{X}_p)$. Somit ist die Größe $K = p\boldsymbol{X}$ eine Erhaltungsgröße, falls die Transformation eine Symmetrie von H ist. Wie sieht dies nun im Fall der Revolutionsfläche aus? Es ist offensichtlich, dass H unabhängig von v ist und damit insbesondere unabhängig von Translationen $v \to v + t$. Das erzeugende Vektorfeld dieser Symmetrie ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial v}$. Somit ist durch $K = p\frac{\partial}{\partial v} = p_v$ eine Erhaltungsgröße entlang der Geodäten gegeben. Wir wollen jetzt einen expliziten Ausdruck für p_v finden.

0.4.2 Clairaut Theorem

Theorem 7 (Clairaut Theorem)**.** *Für eine Revolutionsfläche M gilt entlang einer Geodäten, welche mit den Meridianen der Revolutionsfläche einen Winkel α einschließt, dass*

$$r(u(s))\sin(\alpha(s)) = \text{const} \tag{0.52}$$

Wie lässt sich dieser Satz verstehen? Zunächst wissen wir, dass wegen $\{H, H\} = 0$ der Wert der Hamiltonfunktion (die Gesamtenergie) entlang der Geodäten erhalten ist. Betrachten wir also eine Bewegung mit Energie $H = \frac{1}{2}$, so gilt für diese Bewegung:

$$\left(\frac{p_u^2}{G} + \frac{p_v^2}{E}\right) = 1 \tag{0.53}$$

Somit existiert ein Winkel α über den wir die Impuls als

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{G}\cos(\alpha) \\ \sqrt{E}\sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{0.54}$$

schreiben können. Insbesondere ist $p_v = \sqrt{E}\sin(\alpha) = r(u)\sin(\alpha)$ eine Erhaltungsgröße. Weiterhin beschreibt α offensichtlich den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung p und der Richtung des Meridians, die parallel zu p_u ist. Somit ist das Theorem nachgewiesen.

0.4.3 Parallelen

Da jedem Tupel (p_v, H) eine Geodäte entspricht, interessieren uns zunächst die Geodäten, die zu Extremalwerten von p_v korrespondieren. Hierzu nutzen wir die Methode von Lagrangemultiplikatoren, um Extremwerte von p_v unter der Zwangsbedingung $H = H_0$ zu finden. Mit einem Lagrangemultiplikator λ suchen wir also nach Lösungen von

$$\nabla p_v - \lambda \nabla H = 0\,. \tag{0.55}$$

Da durch die Gradienten über die symplektische Form auch auf eindeutige Weise die hamiltonschen Vektorfelder festgelegt sind, folgt aus dieser Gleichung, dass

$$\lambda \boldsymbol{X}_H = \boldsymbol{p}_v = \frac{\partial}{\partial v} \tag{0.56}$$

Somit müssen die Flusslinien des Hamiltonschen Flusses, d.h. die Geodäten parallel sein, wenn der Drehimpuls p_v extremale Werte annimmt. Insbesondere erhalten wir

Theorem 8. *Eine Parallele ist genau dann eine Geodäte, wenn die Funktion $r(u)$ extremal wird.*

Proof. Der Beweis ist klar, da $p_v = r(u(s))\sin(\pi/2) = r(u(s))$ extremal wird. □

0.4.4 Weitere Geodäten

Meridiane sind Geodäten. Weiterhin gilt für eine allgemeine Geodäte mit Drehimpuls p_v, dass $r(u) \leq p_v$. Betrachten wir also eine Mannigfaltigkeit mit $r(u) \to 0$ für $u \to \pm\infty$, so existiert ein $|u| < \infty$ an dem die Geodäte umkehrt, nämlich genau an der Stelle, an der $\alpha(s) = 0$ erreicht wird. Somit oszilliert eine allgemeine Geodäte zwischen zwei Parallelen.